

64FIN610 – Correction de l'exercice 1

EXERCICE 1

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes ». On considère le jeu suivant :

- si on tire un cœur, on gagne 2€,
- si on tire un roi, on gagne 5€,
- si on tire une autre carte, on perd 1€.

On appelle **X la variable aléatoire** qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.

Travail à faire :

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance mathématique de gain et commentez.
3. Calculer l'écart type.

Réponse

1- Détermination de la loi de probabilité

La variable aléatoire X peut prendre les valeurs 2, 5, -1 mais aussi 7. En effet, si on tire le roi de cœur, on gagne 5 (roi) + 2 (cœur) = 7 €.

- Si la carte tirée est un cœur (autre que le roi de cœur), $X = 2$. $P(X=2) = 7/32$
- Si la carte tirée est un roi (autre que le roi de cœur), $X = 5$. $P(X=5) = 3/32$
- Si la carte tirée est le roi de cœur, $X=7$. $P(X=7) = 1/32$
- Si la carte tirée n'est ni un cœur, ni un roi, $X= -1$ $P(X=-1) = 21/32$

X_i	-1	2	5	7
$P(X=x_i)$	21/32	7/32	3/32	1/32

On constate que la somme des probabilités est égale à 1.

64FIN610 – Correction de l'exercice 1

2- Calcul de l'espérance mathématique de gain

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p(x_i) = -1 \times \frac{21}{32} + 2 \times \frac{7}{32} + 5 \times \frac{3}{32} + 7 \times \frac{1}{32} = \frac{15}{32} \text{ €}$$

$$E(X) = \sum x_i p(x_i) = -1 \times 21/32 + 2 \times 7/32 + 5 \times 3/32 + 7 \times 1/32 = 0,46875 \text{ €} = 0,5 \text{ €}$$

On peut donc espérer gagner en moyenne 0,5 € en jouant. En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques.

La moyenne des résultats se rapproche donc de l'espérance de la loi de probabilité. L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

3- Variance et écart type

x_i	$P(X)$	$X_i \cdot P(X)$	$(X_i)^2 \cdot P(X)$
-1	21/32	-0,65625	0,65625
2	7/32	0,4375	0,875
5	3/32	0,46875	2,34375
7	1/32	0,21875	1,53125
TOTAL	1	0,46875	5,40625

La variance est égale à la différence entre $(X_i)^2 \cdot P(X)$ ET le carré de la somme de $X_i \cdot P(X)$ soit :

$$\text{Variance} = 5,40625 - 0,46875^2 = 5,40625 - 0,219726 = 5,19$$

$$\text{Ecart type} = \text{racine carré de } 5,19 = 2,28$$

L'écart type est d'environ 2,28 € ; Cela signifie qu'avec une espérance mathématique pas très loin de 0,5 €, le risque de perdre de l'argent est important.