



# 77ACG650 – Correction de l'exercice 16

## EXERCICE 16

M. VIARD a commencé par vendre des produits fermiers sur les marchés de Bordeaux : fromages, foie gras, vins... Le fromage représentait déjà le plus gros de ses ventes.

Déçu par la qualité du fromage de brebis qu'il devait vendre, il a décidé de le produire lui-même, il y a quatre ans.

Son entreprise, la SARL VIARD, s'est structurée autour de deux pôles : **un pôle commercial, à Bordeaux**, avec trois salariés, et **un pôle de production en vallée d'Aspe**, dans les Pyrénées, avec également trois salariés.

Mr VIARD a donc suivi une stratégie d'intégration par l'amont en essayant d'acquérir un savoir-faire suffisant dans la production de fromage de brebis pour satisfaire les exigences de sa clientèle : produits homogènes dans le goût, la couleur, la consistance...

En amont de la fromagerie, M. VIARD a créé une coopérative qui regroupe une dizaine d'éleveurs de brebis. La taille moyenne des troupeaux se situe entre 3 000 et 4 000 brebis. Les éleveurs s'engagent à fournir un lait de qualité, essentiel pour la fabrication. En contrepartie, la fromagerie s'engage à leur payer le lait à un prix supérieur à celui du marché.

Soutenu par des campagnes de promotion organisées par le syndicat professionnel, le marché du fromage de brebis est en phase de croissance.

Il est dominé par quelques grosses entreprises, privées ou coopératives, qui collectent le lait auprès d'une centaine d'éleveurs au moins. Elles fabriquent du "brebis laitier", à partir de lait stérilisé, contrairement à la SARL VIARD qui utilise du lait cru pour faire du "brebis fermier". Leur processus de production est plus industriel.

La fromagerie ayant connu jusqu'à ce jour une forte croissance, mais connaissant aujourd'hui des difficultés, Mr VIARD s'adresse à un cabinet d'audit pour améliorer la rentabilité et assurer la pérennité de son entreprise. Vous êtes chargé de son dossier.

M. VIARD se demande s'il ne pourrait pas mieux utiliser son outil de production. Pour vous permettre de lui donner votre avis, on vous communique un descriptif du processus de fabrication et un certain nombre de données relatives à l'exercice N-1.

M. VIARD voudrait connaître le programme de production qui lui aurait permis en N-1 de maximiser sa marge sur coûts variables et donc son résultat.

### Travail à faire :

1. Présenter sous forme canonique le programme linéaire reprenant les contraintes énoncées et la fonction économique à maximiser.
2. Résoudre graphiquement ce programme. Ne pas oublier d'intituler les différentes droites. Par ailleurs, en abscisse vous indiquerez le nombre de fromages de brebis et en ordonnée le nombre de fromages de vaches.
3. **Calculer le résultat optimal.**
4. Comparer le résultat optimal au résultat réel de N-1.





# 77ACG650 – Correction de l'exercice 16

## ANNEXE- LE PROCESSUS DE FABRICATION

Il s'agit du fromage de brebis fabriqué à partir du lait cru. Le lait n'étant pas pasteurisé, son travail est très délicat et demande beaucoup de savoir-faire. Il est indispensable de maîtriser, au cours du processus, le travail des bactéries lactiques. Les différentes étapes sont les suivantes :

- **Matières premières** : Utilisation d'une cuve de 1 000 litres de lait de brebis.
- **Emprésurage** : Chauffe à 32°. Adjonction de présure naturelle. Temps de prise et de coagulation 40 minutes. Au cours de cette étape sont séparés les matières sèches (ou caillé) et le petit lait (ou sérum).
- **Égouttage** : Le caillé est brisé, puis brassé tout en étant réchauffé à 38°. Il est ensuite découpé et mis dans des moules perforés. Le petit lait est évacué.
- **Pressage et salage** : Il est pressé plusieurs fois (durée : 3 heures). Le salage se fait en saumure (1 heure).
- **Affinage** : Il se fait en cave avec une température (12°) et un degré d'hygrométrie (90 %) constants. La durée d'affinage est d'au moins 120 jours pour le « Brebis ».

## ANNEXE - PROGRAMME DE PRODUCTION

L'entreprise fabrique trois types de fromages par tommes de 5 kg :

- Le fromage de brebis (B)
- Le fromage de vache (V)
- Le fromage mixte brebis-vache (M)

### Données de N-1

Fromage	Production	Prix unitaire	CV unitaire	MCV unitaire
B	5 800 tommes	54,20 €	37,80 €	16,40 €
V	4 000 tommes	30,00 €	22,40 €	7,60 €
M	1 800 tommes	40,00 €	27,80 €	12,20 €

Charges fixes : 160 000 €.

### CONTRAINTES

Le programme de production sera déterminé en fixant le niveau de production et de ventes de M à 3 000 unités.

- **Contraintes commerciales**  
Ventes de B limitées à 10 000 unités ;  
Ventes de V limitées à 5 000 unités.

- **Contraintes d'approvisionnement**

Il est possible de collecter au maximum 261 250 litres de lait de brebis mais il n'y a aucune contrainte d'approvisionnement en lait de vache. La consommation laitière (volume de lait nécessaire à la fabrication d'un fromage) est de :

- 27,5 litres de lait de brebis pour B ;
- 45 litres de lait de vache pour V ;
- 10 litres de lait de brebis et 28 litres de lait de vache pour M.

- **Contraintes de production**

L'entreprise peut transformer, au maximum, trois cuves de 1 000 litres de lait par jour. L'atelier fonctionne 5 jours par semaine. Il est fermé 5 semaines consécutives par an pour congés. Le rendement fromager (nombre de fromages par cuve) est de :

- 36 fromages pour B ;
- 22 fromages pour V ;
- 26 fromages pour M.

- **Contraintes d'affinage**

La cave a une capacité de stockage de 3 000 fromages. La durée d'affinage est de :

- 120 jours pour B ;
- 45 jours pour V ;
- 75 jours pour M.

Par souci de simplification, on considérera que l'affinage peut être réparti uniformément sur l'année (prise pour 360 jours).





# 77ACG650 – Correction de l'exercice 16

1. Présenter sous forme canonique le programme linéaire reprenant les contraintes énoncées et la fonction économique à maximiser.

## **Remarques préalables.**

Donnons un nom au nombre de chaque type de fromage :

- NB : le nombre de fromages de brebis
- NV : le nombre de fromages de vaches
- NM : le nombre de fromages mixtes brebis-vaches

D'après l'annexe 2, le nombre de fromages mixtes brebis-vaches (NM) est fixé à 3 000 unités. Donc on se retrouve avec seulement 2 inconnues et une représentation graphique est possible !

### **- Contrainte commerciale**

Il n'existe des contraintes que sur NB et NV, il vient :

$$NB \leq 10\,000$$

$$NV \leq 5\,000$$

### **- Contrainte d'approvisionnement**

Il n'existe une contrainte que sur la quantité de lait de brebis.

Donc ne sont concernés que NB et NM : il vient :

$$27,5 NB + 10 NM \leq 261\,250$$

$$\Rightarrow 27,5 NB + (10 * 3\,000) \leq 261\,250$$

$$\Rightarrow 27,5 NB \leq 261\,250 - 30\,000$$

$$\Rightarrow 27,5 NB \leq 231\,250 \Rightarrow NB \leq 8\,409,09$$

### **- Contrainte de production**

## **Attention.**

Ici la contrainte porte sur le nombre de cuves qu'il est possible de transformer en fromages en 1 année, sachant que :

- le nombre de cuves utilisables par jour est de 3
- l'atelier fonctionne 5 jours par semaine
- l'entreprise est fermée 5 semaines par an

$$\Rightarrow \text{Nombre maximum de cuves utilisables en 1 année} = 3 * 5 * (52 - 5) = 705$$

Il vient :

$$\frac{NB}{36} + \frac{NV}{22} + \frac{NM}{26} \leq 705 \Rightarrow \frac{NB}{36} + \frac{NV}{22} + \frac{3\,000}{26} \leq 705$$

$$\Rightarrow \frac{NB}{36} + \frac{NV}{22} \leq 705 - 115,38 \Rightarrow \frac{NB}{36} + \frac{NV}{22} \leq 590$$

$$\Rightarrow \frac{22 NB + 36 NV}{(36 * 22)} \leq \frac{(590 * 36 * 22)}{(36 * 22)}$$

$$\Rightarrow 22 NB + 36 NV \leq 467\,280$$



## 77ACG650 – Correction de l'exercice 16

### - Contrainte d'affinage

#### **Attention.**

Ici la contrainte porte sur le nombre de jours d'affinage, sachant que :

- la cave peut affiner en même temps 3 000 fromages

- l'affinage peut être effectué pendant 360 jours (donc y compris pendant que l'entreprise est fermée)

Il vient :

$$\Rightarrow 120 \text{ NB} + 45 \text{ NV} + 75 \text{ NM} \leq (3\,000 * 360)$$

$$\Rightarrow 120 \text{ NB} + 45 \text{ NV} + (75 * 3\,000) \leq 1\,080\,000$$

$$\Rightarrow 120 \text{ NB} + 45 \text{ NV} \leq 1\,080\,000 - (75 * 3\,000)$$

$$\Rightarrow 120 \text{ NB} + 45 \text{ NV} \leq 855\,000$$

$$\Rightarrow \text{En simplifiant par 15, il vient } \Rightarrow 8 \text{ NB} + 3 \text{ NV} \leq 57\,000$$

### - Contraintes de positivité

$$\text{NB} \geq 0$$

$$\text{NV} \geq 0$$

### - Fonction à maximiser

Il s'agit ici de maximiser la marge sur coût variable. Il vient :

$$Z = 16,40 \text{ NB} + 7,60 \text{ NV} + 12,20 * 3\,000$$

$$Z = 16,40 \text{ NB} + 7,60 \text{ NV} + 36\,600$$

### - Synthèse

Sous sa forme canonique le programme linéaire se présente ainsi :

$$[\text{Max}] Z = 16,40 \text{ NB} + 7,60 \text{ NV} + 36\,600$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{NB} \leq 10\,000 \\ \text{NV} \leq 5\,000 \\ 27,5 \text{ NB} \leq 231\,250 \\ 22 \text{ NB} + 36 \text{ NV} \leq 467\,280 \\ 120 \text{ NB} + 45 \text{ NV} \leq 855\,000 \\ \text{NB} \geq 0 \\ \text{NV} \geq 0 \end{array} \right.$$



## 77ACG650 – Correction de l'exercice 16

2. Résoudre graphiquement ce programme. Ne pas oublier d'intituler les différentes droites. Par ailleurs, en abscisse vous indiquerez le nombre de fromages de brebis et en ordonnée le nombre de fromages de vaches.

$$\mathbf{NB \leq 10\ 000 \Rightarrow D1}$$

$$\mathbf{NV \leq 5\ 000 \Rightarrow D2}$$

$$\Rightarrow 27,5\ NB \leq 231\ 250 \Rightarrow NB \leq 231\ 250/27,5 \Rightarrow \mathbf{NB \leq 8\ 409 \Rightarrow D3}$$

$$\Rightarrow \mathbf{22\ NB + 36\ NV \leq 467\ 280 \Rightarrow D4}$$

=> Pour tracer une droite il suffit de connaître deux points.

$$\Rightarrow \text{Si } NB = 0 \Rightarrow NV = 467\ 280/36 = 12\ 980$$

$$\Rightarrow \text{Si } NV = 0 \Rightarrow NB = 467\ 280/22 = 21\ 240$$

=> Il suffit donc de joindre ces 2 points pour tracer la droite D4

$$\Rightarrow \mathbf{120\ NB + 45\ NV \leq 855\ 000 \Rightarrow D5}$$

=> Pour tracer une droite il suffit de connaître deux points.

$$\Rightarrow \text{Si } NB = 0 \Rightarrow NV = 855\ 000/45 = 19\ 000$$

$$\Rightarrow \text{Si } NV = 0 \Rightarrow NB = 855\ 000/120 = 7\ 125$$

=> Il suffit donc de joindre ces 2 points pour tracer la droite D5

$$\Rightarrow \mathbf{Z = 16,40\ NB + 7,60\ NV + 36\ 600}$$

Pour une question de lisibilité il est préférable de tracer la droite à maximiser en la "faisant passer par l'origine". Pour cela il suffit de tracer la droite suivante :  **$16,40\ NB + 7,60\ NV = 0$**

En effet, toutes les droites qui ont le même coefficient directeur (coefficient de NB dans notre exemple) sont parallèles entre elles (on ne s'occupe donc pas des 36 600).

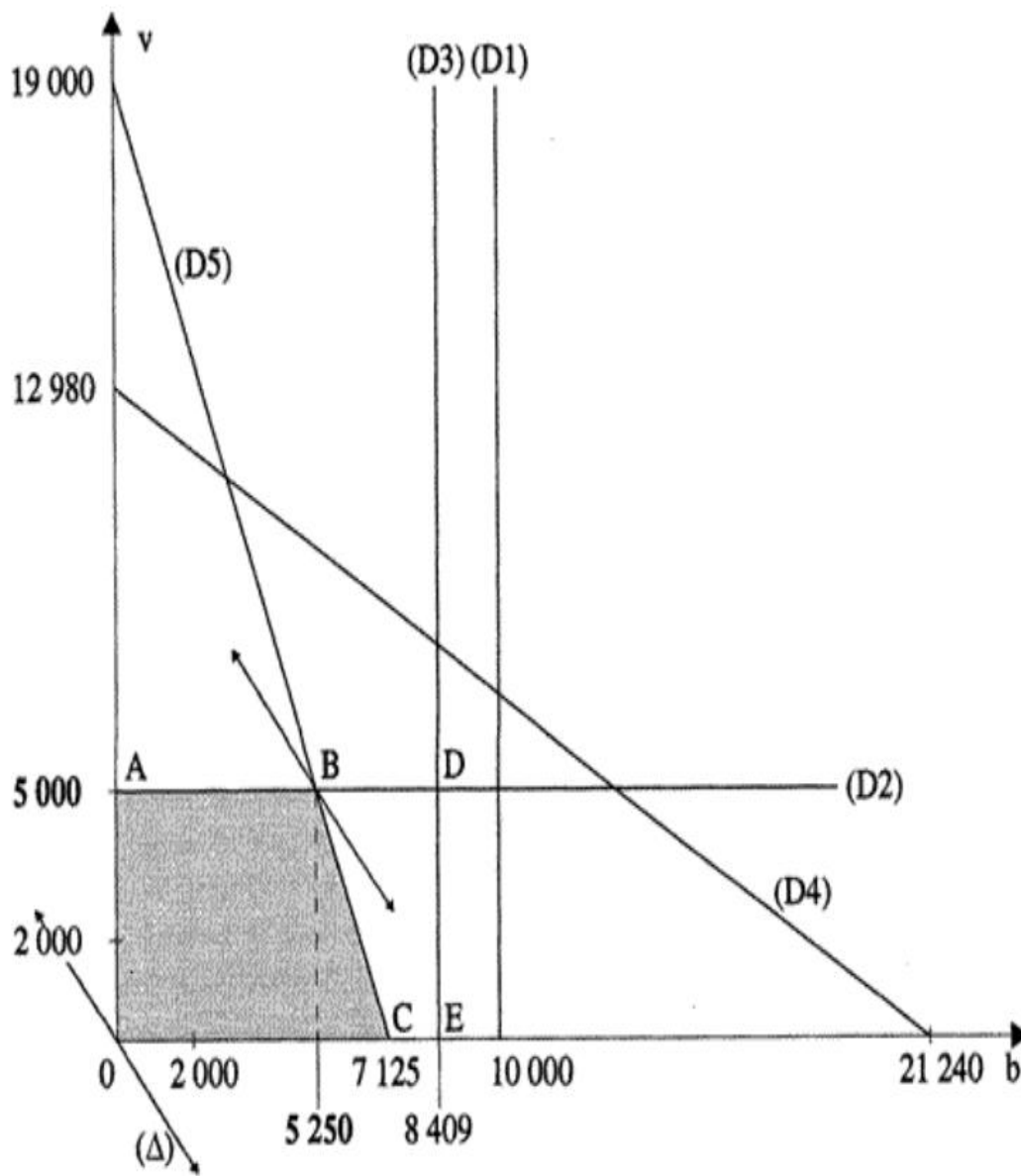
$$\Rightarrow \text{Pour } NB = 0 \quad \Rightarrow NV = 0$$

$$\Rightarrow \text{Pour } NB = 2\ 000 \Rightarrow (16,40 * 2\ 000) = - 7,60\ NV \Rightarrow NV = (16,40 * 2\ 000)/- 7,60 = - 4\ 316$$

CU



## 77ACG650 – Correction de l'exercice 16





## 77ACG650 – Correction de l'exercice 16

### 3. Calculer le résultat optimal

En déplaçant parallèlement la droite à maximiser, le dernier sommet rencontré est le B.

Donc les coordonnées de ce sommet donneront l'optimum de production.

Le sommet B correspond à l'intersection de la droite D2 ( $NV = 5\,000$ ) et D5 ( $120\,NB + 45\,NV \leq 855\,000$ )

Si  $NV = 5\,000$ , alors  $NB = [855\,000 - (45 * 5\,000)]/120 \Rightarrow NB = 5\,250$

#### Conclusion.

Le résultat optimal est atteint quand :  $NV = 5\,000$ ,  $NB = 5\,250$  et  $NM = 3\,000$

Résultat optimal =  $M/CV - \text{Charges fixes totales}$

Résultat optimal =  $(5\,000 * 7,60) + (5\,250 * 16,40) + (3\,000 * 12,20) - 160\,000$

**Résultat optimal =  $160\,700 - 160\,000 = 700\,€$**

### 4. Comparer le résultat optimal au résultat réel de N - 1.

Résultat réel de N - 1 =  $(4\,000 * 7,60) + (5\,800 * 16,40) + (1\,800 * 12,20) - 160\,000$

Résultat réel de N - 1 =  $147\,480 - 160\,000 = -12\,520\,€$

#### Conséquence.

La différence de résultat est de :  $12\,520 + 700 = \mathbf{13\,220\,€}$

CORRECTION TSK