**Le temps, c’est de l’argent.** Cet adage est une des règles de base de la finance. 100 € aujourd’hui ne vaudront pas 100 € dans un an car le temps a un coût, lié à **la renonciation** que représente le fait d’attendre.

Cette prise en compte du prix du temps au travers du calcul actuariel se retrouve dans la plupart des problèmes financiers auxquels sont confrontés les investisseurs et les managers.

**Le calcul actuariel** est notamment utile lorsqu’il s’agit d’estimer la valeur d’un actif coté sur un marché (action, obligation…).

En finance, il existe une **relation fondamentale entre le risque et la rentabilité** : plus un actif est risqué, plus la rentabilité qui en est attendue est élevée.

Pour sa mise en œuvre, il est donc nécessaire de définir et quantifier le risque. Le fait qu’une somme future soit aléatoire, c’est-à-dire incertaine dans son montant et/ou sa date d’apparition entraine un risque. **Pour quantifier ce risque, nous disposons d’outils statistiques tels que la variance et l’écart-type.**

Mais la finance nous enseigne aussi qu’il ne faut pas mettre tous ses œufs dans le même panier. Par la diversification, l’investisseur peut diminuer le risque de son investissement.

Puisqu'une partie du risque peut être réduit par diversification, seul le risque non diversifiable est rémunéré. Pour déterminer la juste rémunération de ce risque, il existe plusieurs modèles. Tout ceci nous amène à la règle suivante : **la valeur d’un actif est égale à la somme des flux de trésorerie actualisés qu’il va procurer dans le futur.**

Pour mettre en œuvre ce principe, il faut déterminer **un taux d’actualisation** en ayant recours à cette règle que plus un actif est risqué, plus la rentabilité qui en est attendue est élevée. Ces Règles permettent de valoriser de façon relativement simple la plupart des actifs financiers, notamment les obligations et les actions. À côté de ces deux types de titres, il existe une plusieurs catégories particulières telles que les options.

On peut, pour conclure cette introduction qu’il existe « un problème » lorsque les flux échangés sont différés. On préfère recevoir le prix de l’échange maintenant que plus tard. Si le paiement est retardé, la somme à payer sera majorée. Cette interaction entre temps et valeur est essentiel et c’est ce que l’on va découvrir à travers l’étude :

* des intérêts simples,
* des intérêts composés,
* des emprunts indivis
* des emprunts obligataires.
* La problématique des rentes

**Chapitre 1 : Les intérêts simples**

Quand une personne (le prêteur) prête un capital à une autre personne (l’emprunteur), il est habituellement convenu que l’emprunteur rembourse à l’échéance, non seulement le montant du prêt, mais un supplément : l’intérêt du prêt.

L’intérêt est le dédommagement versé au prêteur qui renonce à la satisfaction qu’il obtiendrait en dépensant immédiatement son argent. Le prêteur aurait pu notamment employer lui-même son argent dans une activité commerciale qui lui aurait rapporté des bénéfices. La perte de ces bénéfices potentiels est ce qu’on appelle **un coût d’opportunité**.

Ce coût est compensé par l’intérêt. Le prêteur court le risque de ne pas être remboursé à l’échéance du prêt si l’emprunteur est défaillant. L’intérêt incorpore la rémunération de ce risque.

**1) Le taux d’intérêt**

**Le taux d’intérêt** est le rapport entre l’intérêt obtenu pendant une unité de temps et le capital prêté. Ce rapport s’exprime au choix :

* par une fraction (exemple => 5/ 100),
* par un nombre décimal (exemple => 0,05),
* par un pourcentage (exemple => 5 %).

L’unité de temps choisie pour définir le taux est habituellement l’année. Ce peut être aussi le semestre, le trimestre, une période quinquennale, etc.

**2) Le calcul des intérêts simples**

Les intérêts simples sont principalement utilisés pour les crédits de trésorerie à court terme. Les intérêts simples sont payés, soit en fin de période (tous les mois, tous les trimestres, tous les semestres ou tous les ans, selon les stipulations du contrat). Ils ne s'ajoutent pas au capital prêté pour produire eux-mêmes des intérêts.

Les intérêts simples sont proportionnels au capital, à la durée du prêt et au taux. Si on utilise un taux annuel, la durée du prêt devra être exprimée en année. Si on utilise un taux mensuel, la durée du prêt devra être exprimée en mois ! Le montant des intérêts produits est égal :

Le montant des intérêts produits = Capital \* taux d’intérêt \* durée

Le total du capital placé et des intérêts est appelé valeur acquise,

1. **Application 1**

*On place 100,00 € à 4,2 % l’an pendant 8 mois.*

*=> L’intérêt perçu à la fin des 8 mois = 100,00 \* 0,042 \* 240/360 = 2,80 €*

*=> La valeur acquise à la fin du prêt par le capital prêté (A) = 100,00 + 2,80 = 102,80 €*

Remarque : Il est d’usage en France, dans les calculs d’intérêts, de compter l’année pour 360 jours et les mois étant comptés pour leur nombre de jours réel. Ceci facilitait autrefois le calcul manuel des intérêts. Cette méthode n’est plus justifiée avec l’usage des calculatrices et de l’informatique et, en toute logique, on devrait revenir à une année de 365 jours (voire 366 jours). Les établissements de crédit continuent cependant à calculer les intérêts simples en fonction d'une année de 360 jours, notamment en matière de crédit d'escompte.

1. **Application 2**

On place 100,00 € à 0,35 % par mois pendant 8 mois.

=> L’intérêt perçu à la fin des 8 mois = 100,00 \* 0,0035 \* 8 = 2,80 €

=> La valeur acquise à la fin du prêt par le capital prêté (A) = 100,00 + 2,80 = 102,80 €

1. **Application 3**

*On place 300,00 € à 5 % l’an du 15 avril au 30 mai.*

*ATTENTION : La durée correspond au nombre de jours qui séparent la date du placement de la date du retrait, en négligeant l'une des deux dates (on ne tient pas compte du 1 er ou du dernier jour), les mois étant retenus pour leur nombre de jours exacts.*

*1ère solution - On compte l'année sur 360 jours*

Durée = 45 jours. La valeur acquise (A) à la fin du prêt par le capital prêté = 300,00 + 1,88 = 301,88 €

2ème solution - On compte l'année sur 365 jours

Durée = 45 jours. La valeur acquise (A) à la fin du prêt par le capital prêté = 300,00 + 1,85 = 301,85 €

3) L’escompte

1. Définition de l’escompte

L’escompte est une forme particulière de prêt pratiquée par les banques. La banque achète à un bénéficiaire un effet (lettre de change ou billet à ordre, parfois warrant) payable à terme et règle cet achat au comptant. Tout se passe comme si la banque prêtait au bénéficiaire le montant de l’effet entre le jour de la négociation et l’échéance. Cependant, la banque paie pour l’effet escompté, un prix légèrement inférieur à la valeur nominale. Elle retient un intérêt que l’on appelle l’escompte. Le mot "escompte" désigne, soit l’opération de négociation de l’effet auprès de la banque, soit l’intérêt retenu par la banque.

1. Escompte commercial

L’escompte commercial est celui calculé en pratique par les banques. C’est un intérêt simple qui est proportionnel à la valeur nominale de l’effet. Si l’on désigne par : e, l’escompte, VN, la valeur nominale de l'effet (valeur inscrite sur l'effet) t, le taux d’escompte relatif à l’unité de temps, n, le délai entre le jour de la négociation et l’échéance, mesuré avec la même unité de temps,

=> L’escompte = VN \* t \* n

La durée de l'escompte correspond au nombre de jours qui séparent la date de mise à l'escompte de l'effet de la date d'échéance de l'effet, en négligeant la date de remise (on ne tient pas compte du 1 er jour), les mois étant retenus pour leur nombre de jours exacts. La somme perçue par le bénéficiaire de l'effet escompté devrait être la valeur actuelle définie par la relation :

=> Valeur actuelle = Valeur nominale - Escompte

En réalité, la banque retranche de la valeur nominale, non seulement l’escompte proprement dit, mais aussi des commissions et la T.V.A. Par ailleurs, les banques rajoutent souvent "un ou plusieurs jours de banque" ! L'usage est de compter l'année sur 360 jours.

*c) Application*

*On escompte un effet de 250,00 € échéant dans 2 mois, soit 2/12 d’année, au taux annuel de 9 %.*

*Réponse : La valeur actuelle de l’effet est égale à 250,00 - 3,75 = 246,25 €*

**Chapitre 2 : Les intérêts composés**

1. **Généralités et formule**

Les intérêts composés sont capitalisés périodiquement, c'est-à-dire qu'ils s'ajoutent au capital pour produire eux-mêmes des intérêts. Les périodes sont les intervalles de temps égaux à la fin desquels les intérêts sont calculés et capitalisés.

**Le taux d'intérêt composé est défini en relation avec la période.** Ce système est utilisé pour les prêts à long terme (plusieurs années).

**Désignons par :**

* **C0** => Le capital déposé à l’époque 0 (début de la période 1)
* **Cn** => La valeur acquise à la fin de la période n ;
* **i** => Le taux d’intérêt pour un euro, relatif à une période de capitalisation

On peut écrire : **=> Cn = Co \* (1 + i) n**

Les intérêts s’obtiennent par différence => Cn – Co

1. **Quelques remarques**
2. Concordance avec la période et le taux

* Capitalisation annuelle => Taux annuel et nombre d'années de placement
* Capitalisation semestrielle => Taux semestriel et nombre de semestres de placement
* Capitalisation trimestrielle => Taux trimestriel et nombre de trimestres de placement
* Capitalisation mensuelle => Taux mensuel et nombre de mois de placement

1. Valeur acquise en cours de période

On place 1 000,00 € à 8 % l’an à intérêts composés pendant 3 ans 9 mois.

Première solution (dite rationnelle) : On considère que la valeur acquise, au bout de 3 ans, reste placée à intérêts simples pendant 9 mois.

* La valeur acquise après 3 ans = 1 259,71
* Les intérêts simples des 9 derniers mois = 75,68
* La valeur acquise après 3 ans 9 mois = 1 335,29 €
* Le total des intérêts est égal à 325,29 €

Deuxième solution (dite commerciale) : Dans la pratique, la solution rationnelle est peu employée. On lui préfère une solution approchée, fondée sur l'utilisation directe de la formule générale

=> Cn = Co \* (1 + i) n ou "n" devient un nombre fractionnaire

=> Valeur acquise = 1 000,00 \* 1, 083,75 = 1 334,56 €

1. Valeur actuelle d’un capital

Nous savons déterminer la valeur acquise par un capital placé à intérêts composés au bout d'un certain temps (nombre entier ou non de périodes). Cette opération est une capitalisation. A l'inverse, nous pouvons nous demander quelle somme il faut placer à intérêts composés pour obtenir, après un certain temps de placement, un capital déterminé. Si on a la possibilité de placer ses capitaux au taux d’intérêt composé i, il est équivalent :

* de recevoir immédiatement un capital C0 et de le placer pendant n périodes ;
* ou d’attendre la fin des n périodes pour recevoir un capital : Cn = C0 (1 + i)n .

Le capital Co est appelé valeur actuelle (ou valeur actualisée), à l’époque 0, du capital Cn échéant à l’époque n.

**Chapitre 3 : Les emprunts indivis**

1) Définition

Remboursable à une seule personne (physique ou morale) qui est le plus souvent un établissement financier.

* On place 5 000,00 € par an, du 1 er janvier 2018 au 1 er janvier 2025 inclus, au taux de 6 % l’an. Quelle somme obtiendra-t-on le 1 er janvier 2025 ?
* Quelle somme faut-il placer annuellement pendant - ans pour obtenir 800 000 € à la date du sixième versement ? Le taux d’intérêt annuel est 4 %.

**Les emprunts obligataires :** Remboursables à plusieurs personnes (des milliers le plus souvent). Ces personnes pouvant être des personnes physiques ou des entreprises.

**Valeur actuelle d’une suite d’annuités constantes perpétuelles**

Il arrive que le nombre d’annuités constantes ne soit pas défini et qu’on le considère comme théoriquement infini. C’est le cas de certains titres d’emprunts "perpétuels" (titres subordonnés à durée indéterminée). C’est aussi parfois le cas de l’estimation des flux de trésorerie futurs qu’une entreprise est censée générer. La valeur actuelle d’une suite d’annuités constantes perpétuelles est la limite de V0 quand n tend vers l’infini.

Exemple

La valeur actuelle d’une suite d’annuités perpétuelles de 1 000,00 €, au taux d’actualisation de 5 %, est égale à 1000,00/0,05 = 20 000,00 €. Si l’on place à perpétuité un capital de 20 000,00 € au taux annuel de 5 %, on recevra une rente annuelle égale à 20 000,00 \* 5 % = 1 000,00 €.

Exemple

Une entreprise souhaite investir 1 000 en période 0. Cet investissement donnera les flux économiques nets d'I.S suivants à la fin de chaque exercice :

=> Fin 1 => 300

=> Fin 2 => 200

=> De fin 3 à fin 6 => 500

**Travail à faire :**

Calculez la valeur actuelle des flux engendrés par cet investissement.

**2) Les différents modes de remboursement d’un emprunt indivis**

On peut rembourser un emprunt indivis de trois façons :

* en une seule fois à l’échéance (Cas rare) => Remboursement in fine
* par amortissements constants
* par annuités constantes

Définition d’une annuité

=> Annuité = Intérêts + Amortissements du capital

Remarque : Amortir le capital d'un emprunt signifie rembourser tout ou partie de la valeur d’origine de l’emprunt. Conséquences : Si l’amortissement est constant, l’annuité ne l’est pas. Si l’annuité est constante, l’amortissement ne l’est pas.

**Remboursement d’un emprunt indivis in fine**

Exemple

Le 01.01.N, une entreprise emprunte 1 000 000 € sur 5 ans. Remboursement in fine, taux = 10 %, durée = 5 ans. L'exercice comptable coïncide avec l'année civile. Présenter le tableau d’amortissement de l’emprunt. A l'échéance des quatre premières annuités l'entreprise ne paiera que des intérêts et, à l'échéance de la 5ème annuité, elle paiera les intérêts de cette année plus la totalité du montant emprunté.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Date d’échéance | K restant dû (début) | Intérêts | Amortissements | Annuités | K restant dû (fin) |
| 31/12/N | 1 000000 | 100 000 |  | 100 000 | 1 000000 |
| 31/12/N+1 | 1 000000 | 100 000 |  | 100 000 | 1 000000 |
| 31/12/N+2 | 1 000000 | 100 000 |  | 100 000 | 1 000000 |
| 31/12/N+3 | 1 000000 | 100 000 |  | 100 000 | 1 000000 |
| 31/12/N+4 | 1 000000 | 100 000 | 1 000000 | 1 100000 | 0 |
| TOTAL |  | 500 000 | 1 000 000 | 1 500 000 |  |

**Remboursement d’un emprunt indivis par amortissements constants**

Exemple

Le 01.01.N, une entreprise emprunte 1 000000 € sur 5 ans. Remboursement par amortissements constants, taux = 10 %. L'exercice comptable coïncide avec l'année civile. Présenter le tableau d’amortissement de l’emprunt.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Date d’échéance | K restant dû (début) | Intérêts | **Amortissements** | Annuités | K restant dû (fin) |
| 31/12/N | 1 000000 | 100 000 | **200 000** | 300 000 | 800 000 |
| 31/12/N+1 | 800 000 | 80 000 | **200 000** | 280 000 | 600 000 |
| 31/12/N+2 | 600 000 | 60 000 | **200 000** | 260 000 | 400 000 |
| 31/12/N+3 | 400 000 | 40 000 | **200 000** | 240 000 | 200 000 |
| 31/12/N+4 | 200 000 | 20 000 | **200 000** | 220 000 | 0 |
| TOTAL |  | 300 000 | **1 000 000** | 1 300 000 |  |

**Remboursement d’emprunt indivis par annuités constantes**

**Exemple**

**Un emprunt de nominal 1 000000 € est contracté le 01/01/N pour une durée de 5 ans. Taux d’intérêt annuel = 10 %. Service de l’emprunt (mode de remboursement de l'emprunt) par annuités constantes. L'exercice comptable coïncide avec l'année civile. Question : Présenter le tableau d'amortissement de l'emprunt.**

**Annuité = valeur de l’emprunt \* i /(1-(1+i)-n) = 1 000 000 \* 0,1 / (1- 1,1-5) = 263 797,48 €**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Date d’échéance** | **K restant dû (début)** | **Annuités** | **Intérêts** | **Amortissements** | **K restant dû (fin)** |
| **31/12/N** | **1 000000** | **263 797,48** | **100 000** | **163 797,48** | **836 202,52** |
| **31/12/N+1** | **836 202,52** | **263 797,48** | **83 620,25** | **180 177,23** | **656 025,29** |
| **31/12/N+2** | **656 025,29** | **263 797,48** | **65 602,53** | **198 194,95** | **457 830,34** |
| **31/12/N+3** | **457 830,34** | **263 797,48** | **45 783,03** | **218 014,45** | **239 815,89** |
| **31/12/N+4** | **239 815,89** | **263 797,48** | **23 981,59** | **239 815,89** | **0** |
| **TOTAL** |  | **1 318 987,4** | **318 987,4** | **1 000 000** |  |

3) Formule pour trouver directement le montant du p ième amortissement (MP), à partir de M1

Mp correspond au montant du p ième amortissement et M1 est égal au montant du premier amortissement.

**=> Mp = M1 \* (1 + i)p-1**

**Vérification :**

**M 4 = 163 797,48 \* (1,10)4-1**

**M 4 = 218 014,45**

**Chapitre 4 : Les emprunts obligataires**

1. Vocabulaire des emprunts obligataires
2. Définition d’une obligation

Il s’agit d’un titre négociable, donnant les mêmes droits de créance pour une même valeur nominale. L’obligation rapporte au souscripteur (celui qui achète l’obligation => l'obligataire) des intérêts fixes le plus souvent. Nous verrons qu’il existe des obligations à taux variable, voire des obligations ne rapportant pas d’intérêts => Obligations à coupons zéro ! L’émetteur de l’emprunt obligataire dispose de plusieurs modalités pour le rembourser aux souscripteurs

1. Qui peut émettre un EO ?

Les entreprises du secteur public ou privé et les États.

1. Durée de l’emprunt

Un emprunt obligataire commence à partir de la date de jouissance (date à partir de laquelle on commence à calculer les intérêts) et se termine lors du dernier remboursement. Notez que la date de jouissance d’un EO peut être antérieure à sa date d’émission. => Plus attrayant pour le souscripteur !

*Exemple : EO émis le 15/01/N, date de jouissance : le 1/01/N*

* *Le 15/01/N+1, le souscripteur percevra 12,5 mois d’intérêt !*

*Bien entendu, ceci n’est valable que pour la première échéance !*

1. Valeur nominale (VN)

Également appelé "pair". C'est la valeur sur laquelle doit être appliquée le taux d'intérêt facial (ou nominal).

1. Prix d'émission (PE)

Prix payé par les souscripteurs de l'EO, à l'émetteur de l'EO. Il peut être inférieur à la VN => Plus attrayant pour les souscripteurs.

1. Prix de remboursement (PR)

Prix remboursé, au souscripteur, par l'émetteur. Le plus souvent, il est > à la VN (mais ce n’est pas obligatoire).

1. Prime de remboursement

Prime de remboursement = PR – PE

Remarque : Les juristes ont un autre vocabulaire :

* VN - PE = Prime d'émission
* PR - VN = Prime de remboursement

Notez que cela ne change rien au montant total !

*Exemple : PE = 800 € ; VN = 1 000 € ; PR = 1 500 €*

*Prime de remboursement = 1 500 - 800 = 700 € ou PR = (1 000 - 800) + (1 500 - 1 000) = 700 €.*

1. Les différents modes de remboursement des emprunts obligataires
2. Par annuités constantes

A chaque échéance, l’émetteur verse la même annuité. Les annuités sont donc toutes égales entre elles et comportent des intérêts et du capital. Le montant des intérêts, inclus dans l’annuité, diminue à chaque échéance alors que le montant du remboursement du capital emprunté augmente à chaque échéance.

1. Par amortissements constants

Avec cette méthode les annuités ne seront pas égales entre elles. En effet, le nombre d'obligations amorties étant le même à chaque échéance, le montant des intérêts diminue.

1. In fine relatif

Lors de chaque échéance (sauf la dernière), l'émetteur ne verse que les intérêts. Donc ces annuités seront toutes égales puisqu’il n’y a pas de remboursement d’obligations durant ces périodes ! A la dernière échéance, l'émetteur remboursera toutes les obligations au prix de remboursement + les intérêts de la dernière annuité.

1. **In fine absolu**

L’émetteur ne verse rien pendant la durée de l’emprunt. Lors de la dernière échéance, il rembourse toutes les obligations au prix de remboursement ainsi que les intérêts composés. En réalité ce cas se rencontre très rarement.

1. **Obligations à coupon "zéro"**

L’émetteur ne verse aucun intérêt durant la durée de l’emprunt (même pas à l’échéance !)

Exemple : Un EO à coupon zéro d’une durée de 12 ans est émis le 1/10/N.

Prix d’émission = 1 000 €.

Prix de remboursement = 4 500 €.

En fait, l’absence de rémunération est largement compensée par l’importance de la prime de remboursement !

1. Exemple 1

Nombre d’obligations émises le 30/03/N = 350 000.

VN = 1 000,00 €. Remboursement au pair, par annuités constantes. Taux d’intérêt facial (nominal) = 8,4 %. Durée 15 ans.

Présentez dans le tableau ci-dessous les trois premières lignes du tableau d’amortissement de cet EO.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Date d’échéance | Capital restant dû | Intérêts ou coupons | Amortissement théorique | Obli. Réell. amorties | Amortissement réel | Obligations vivantes |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

1. Exemple 2 : Remboursement au-dessus du pair

=> PR > VN (quel que soit le PE). Identique au cas précédent, toutefois le calcul de l'annuité est modifié. On utilise i' à la place de i dans toutes les formules et PR à la place de VN.

- i’ = (VN \* i) / PR

Une SA a émis le 1/09/N un emprunt obligataire de 2 000 000 € (en VN).

VN = 200,00 € ; PE = 195,00 € ; PR = 215,00 € ; Taux d’intérêt annuel = 10,75 % ; Remboursement par 12 annuités constantes.

Présentez dans le tableau ci-dessous, les deux premières lignes du tableau d'amortissement de l'EO.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Date d’échéance | Capital restant dû | Intérêts ou coupons | Amortissement théorique | Obligations réellement amorties | Amortissement réel | Obligations vivantes |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

1. Exemple 3 : Remboursement par amortissement constant

Reprenons l’exemple précédent (remboursement au-dessus du pair) mais cette fois ci, remboursement par amortissement constant et pas de soulte. Rappel de l’énoncé :

Une SA a émis le 1/09/N un EO de 2 000 000 €.

* VN = 200,00 €.
* PE = 195,00 €.
* PR = 215,00 €.
* Taux d’intérêt annuel = 10,75 %.
* Remboursement sur 12 ans.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Date d’échéance | Capital restant dû | Intérêts ou coupons | Amortissement théorique | Obligations réellement amorties | Amortissement réel | Obligations vivantes |
|  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |

**Chapitre 5 : Les rentes**

1. **Rente temporaire de flux variant en progression arithmétique**

**Soit un investissement financier dont les caractéristiques sont les suivantes :**

* **ST = somme acquise ;**
* **Ft = flux de trésorerie à la date t (versements en fin de période) ;**
* **T : nombre total de flux ;**
* **i : taux d’intérêt périodique ;**
* **r : raison de la suite arithmétique.**

**Ainsi, la valeur acquise d’une suite temporaire de flux de trésorerie Ft en progression arithmétique de raison r, pour un taux d’intérêt i, est :**

**ST = (F1 + r/i) (((1+i)T- 1)/ i) – Tr/i**

**Ainsi, la valeur actuelle d’une suite temporaire de flux de trésorerie Ft en progression arithmétique de raison r, pour un taux d’intérêt i, est :**

**S0 = (F1 + r/i + Tr) ((1 - (1+i)-T)/ i) – Tr/i**

1. **Rente perpétuelle de flux variant en progression arithmétique**

**Ainsi la valeur actuelle d’une rente perpétuelle à termes variant en progression arithmétique, de raison r et de premier terme F1, pour un taux d’intérêt i, est :**

**S0 = F1/i + r/i2**

1. **Rente temporaire de flux variant en progression géométrique**

**Si un investisseur augmente ou diminue, à intervalles réguliers un placement d’un pourcentage constant, il s’agit d’un rente en progression géométrique. Soit un investissement financier dont les caractéristiques sont les suivantes :**

* **ST = somme acquise ;**
* **Ft = flux de trésorerie à la date t (versements en fin de période) ;**
* **T : nombre total de flux ;**
* **i : taux d’intérêt périodique ;**
* **q : raison de la suite géométrique.**

**Valeur acquise :**

**1er cas : q différent de (1+i)**

**ST = F1 \* (q T- (1 + i)T)/ (q – (1 + i)**

**2ème cas : q = (1 + i)**

**ST = T \* F1 (1 + i)T-1**

**Valeur actuelle :**

**1er cas : q différent de (1+i)**

**S0 = (F1 / (1 + i)T) \* (q T- (1 + i)T) / (q – (1 + i)**

**2ème cas : q = (1 + i)**

**S0 = T \* F1 / q**

1. **Rente perpétuelle de flux variant en progression géométrique**

**L’évaluation d’une rente perpétuelle consiste à calculer sa valeur actuelle puisque la valeur acquise n’a ici aucun sens.**

**1er cas : q différent de (1+i)**

**S0 = F1 / ((1 + i) – q)**

**2ème cas : q = (1 + i)**

**Dans ce second cas, la valeur actuelle de la rente perpétuelle tend vers une limite infinie.**

**EXERCICES**

**EXERCICE 1**

Un capital de 16 000 € est placé pendant 28 jours (année de 360 jours) au taux annuel de 12,5 %.

**Travail à faire :**

1. **Calculer les intérêts**
2. **Calculer la valeur acquise.**

**EXERCICE 2**

Un capital de 136 200 € a été est placé pendant 121 jours (année de 360 jours) et il a acquis une valeur de 140 548,94 €.

**Travail à faire :**

1. **Quel est le taux d’intérêt ?**

**EXERCICE 3**

Un capital de 7 325 €, placé au taux annuel de 11 % (année de 365 jours), a acquis le 17 novembre la valeur de 7 380,19 €.

**Travail à faire :**

1. **À quelle date ce capital avait-il été placé ?**

**EXERCICE 4**

Un capital a acquis en 67 jours, au taux de 13 % (année de 360 jours), une valeur de 175 751,76 €.

**Travail à faire :**

1. **Quel est le montant de ce capital ?**

**EXERCICE 5**

Un capital de 1 000 € est placé au taux annuel de 11,5 % pendant 8 ans.

**Travail à faire :**

1. **Calculer la valeur acquise**
2. **Quel est le montant des intérêts**

**EXERCICE 6**

Un capital de 2 000 € a rapporté 7 796 € d’intérêts en 13 ans.

**Travail à faire :**

**Quel était le taux** ?

**EXERCICE 7**

Un capital de 6 700 € a acquis une valeur de 10 632,06 € après avoir été placé au taux annuel de 8 %.

**Travail à faire :**

**Quelle a été la durée du placement ?**

**EXERCICE 8**

Un capital placé pendant 9 ans a une valeur acquise de 1 800 €.

**Travail à faire :**

1. **Quelle est sa valeur actuelle avec un taux annuel d’actualisation de 10 % ?**

**EXERCICE 9**

Un capital de 8 900 € a été placé pendant 7 ans et 6 mois au taux annuel de 6 % avec capitalisation semestrielle des intérêts.

Le taux semestriel d’intérêts composés est le taux proportionnel au taux annuel.

**Travail à faire :**

1. **Quel est le taux d’intérêt semestriel ?**
2. **Quelle est la valeur acquise à la fin du placement ?**
3. **Quel est le taux mensuel équivalent au taux semestriel ?**
4. **Quelle serait la valeur acquise par le capital initial après 7 ans et 10 mois ?**

**EXERCICE 10**

Un emprunt de 500 000 € est effectué le 15/07/N. Remboursable par six annuités constantes. Taux 10,5%.

**Travail à faire :**

1. **Calculez le montant de l'annuité constante.**
2. **Présentez le tableau d'amortissement de l'emprunt en entier.**

**EXERCICE 11**

Une société a contracté le 31/12/N un emprunt remboursable en 12 annuités constantes, la première échéant le 31/12/N+1.

Le montant de l'emprunt s'élève à 1 620 000 €. Taux d'intérêt, 14,5% l'an.

**Travail à faire :**

1. **Présenter les deux premières lignes du tableau d'amortissement de l'emprunt.**
2. **Calculer le sixième amortissement.**

**EXERCICE 12**

Un emprunt amortissable par 10 annuités constantes est tel que le 1er amortissement est de 9873,01 € et le 3ème de 11730,13 €.

**Travail à faire :**

1. **Calculer le taux nominal puis le montant de l'emprunt sachant que l'annuité constante est de 23 373,01 €.**
2. **Quel est le montant du 10ème amortissement ?**
3. **Quel est le montant restant dû après le 3ème amortissement.**

**EXERCICE 13**

Le 1/01/N, Un investissement de 1 800 000 € est financé par moitié par un emprunt. L'emprunt est remboursable par 40 trimestrialité constantes, la première échéant le 1/04/N+2. Taux d'intérêt annuel = 13%.

**Travail à faire :**

1. **Calculer le montant de la trimestrialité.**

**EXERCICE 14**

Un emprunt est remboursable par annuités constantes

* le 7ème amortissement = 67 485,98 €
* le 8ème amortissement = 75 584,30 €
* le dernier amortissement = 94 812,95 €

**Travail à faire :**

1. **Calculer le taux annuel d'intérêt.**
2. **Calculer le 1er amortissement.**
3. **Calculer le montant de l'annuité constante.**
4. **Le montant de l'emprunt.**
5. **Le capital dû après le versement de la 6ème annuité.**

**EXERCICE 15**

On désire se constituer un capital de 15 000 € le 31 décembre 2020. On place 5 000 € le 1er janvier 2008 et 3 000 € le 31 décembre 2010. Taux 6,5 %.

**Travail à faire :**

1. Quelle somme pourrait-on retirer le 31/12/2015 tout en laissant intact le capital final au 31 décembre 2020 ?
2. Si l’on n’avait pas retiré la somme mentionnée à la Q1, à quelle date aurait-on disposé des 15 000 € désirés ?

**EXERCICE 16**

On effectue des versements trimestriels de 300 € pendant 8 ans, du 31 mars N au 31 mars N+8 (on arrête les versements de 300 €). Le taux d’intérêt trimestriel est équivalent au taux annuel de 8 %.

**Travail à faire :**

1. Calculer la valeur acquise par ces versements le 31 mars N+8.
2. Calculer la valeur acquise par ces versements le 31 décembre N+8.

**EXERCICE 17**

On contracte un emprunt le 1er janvier N. Cet emprunt sera remboursé par 15 annuités constantes de 11 911,61 €. Le montant de l’emprunt est équivalent à ces annuités actualisées au taux de 6,5 %.

**Travail à faire :**

1. Calculer le montant de l’emprunt si la 1ère annuité est versée :

* le 1er janvier N+1.
* avec un différé de 2 ans, le 1er janvier N+3.

1. On décide de remplacer les 15 annuités versées à partir du 1er janvier N+1 (question 1.a), par 180 mensualités constantes équivalentes, la première étant versée le 1er février N.

* Quel est le montant d’une mensualité ?
* Comparer les 12 paiements mensuels au paiement annuel unique équivalent.

**EXERCICE 18**

Un emprunt de 45 000 € est remboursé par le versement de 18 annuités de 6 000 € chacune, la première étant versée un an après l’emprunt.

**Travail à faire :**

Quel est le taux de l’emprunt ?

**EXERCICE 19**

Un individu emprunte 20 000 €, au taux de 7 %, pour l’achat d’une voiture. Il convient avec son prêteur qu’il remboursera 4000 € à la fin de la première année, 6000 € en fin de la deuxième année, et le solde la fin de la troisième année. Quel sera le montant payé dans trois ans ?

**EXERCICE 20**

En vue de régler une acquisition, un individu doit effectuer neuf versements mensuels à la fin de chaque mois. Ces neuf mensualités ont les caractéristiques suivantes :

* Trois mensualités de chacune 460 € ;
* Puis trois mensualités de chacune 305 € ;
* Puis trois mensualités de chacune 152 €.

a) au taux de 10 %, quelle est la valeur actuelle de cette suite de mensualités ?

b) Sachant que la valeur acquise des règlements est de 3050 € et que les neuf mensualités ont les caractéristiques suivantes :

* Trois mensualités de chacune y ;
* Puis trois mensualités de chacune y/2 ;
* Puis trois mensualités de chacune y/3 ;

Déterminer, au taux de 10 %, le montant y.

**EXERCICE 21**

En tant que vainqueur d’un concours de téléréalité, vous pouvez choisir l’un des prix suivants :

* 100 000 € aujourd’hui
* 180 000 € à la fin de la cinquième année.
* 11 400 € par an à perpétuité.
* 19 900 € pendant chacune des 10 années à venir.
* 6 500 € l’année prochaine, puis 5 % de plus chaque année à perpétuité.

Si le taux d’intérêt est de 10 %, quel prix à le plus de valeur ?

**EXERCICE 22**

Un salarié décide de se constituer une retraite complémentaire. Il est âgé de 40 ans et prévoit de partir en retraite à 65 ans. A partir de sa cessation d’activité, il souhaite que cette retraite complémentaire lui assure une rente mensuelle de 460 € pendant 20 ans.

* En supposant des versements en fin de période, quelle somme constante doit-il placer tous les mois jusqu’à sa retraite, pour obtenir un tel résultat, si le taux de l’argent est de 6 % ?
* L’organisme auquel il s’adresse lui propose une seconde modalité de sortie en effectuant les mêmes versements pendant son activité : toucher 60 000 € à sa mise à la retraite. Quelle est la meilleure solution ?

**EXERCICE 23**

Soit des obligations A de 1000 € rapportant un coupon annuel de 75 € et remboursables le 1er octobre N+3. Nous sommes le 1er octobre N. Calculez, à cette date la valeur de marché de ces obligations. On retiendra l’hypothèse où le taux du marché est de 6 %, puis de 10 %. Concluez

**EXERCICE 24**

Un groupe pétrolier constitue une réserve de trésorerie pour faire face à ses obligations de démantèlement des plates-formes pétrolières. Il prévoit d’effectuer les placements successifs suivants :

* 1/01/2008 : 600 millions d’euros
* 1/01/2010 : 360 millions d’euros
* 1/01/2011 : 900 millions d’euros

**Travail à faire :**

1. Ces placements étant effectués au taux annuel de 7,5 %, quelle sera la réserve constituée le 1er janvier 2012 ?
2. Au lieu d’effectuer ces placements, le groupe décide d’épargner chaque année trois sommes égales les 1er mai, 1er septembre et 1er janvier. Ces sommes seront placées au taux relatif à une période de 4 mois, équivalent à 7,5 % annuel. Quel est le montant de chacun des versements qu’il faudrait effectuer du 1/05/2008 au 1/01/2012 inclus pour obtenir la réserve trouvée à la question 1 ?

**EXERCICE 25**

Evaluer une rente perpétuelle annuelle versant des flux constants de 5000 € sachant que le taux est de 5 %.

* Si la rente est immédiate ;
* Si les flux sont versés en début de période ;
* Si la rente est différée de 3 ans ;
* Si la rente est anticipée de 3 mois.

**EXERCICE 26**

Un individu désire investir dans six mois une partie de ses liquidités dans une assurance-vie ou les fonds sont bloqués pendant huit ans. Il compte effectuer des versements annuels. Le premier versement prévu est de 4000 €. Il pense pouvoir augmenter son placement de 1000 € chaque année. Le taux d’intérêt est de 6 %.

* Quelle est la valeur actuelle de son placement ?
* Quelle est la valeur acquise ?

**EXERCICE 27**

Un investisseur doit choisir entre deux contrats d’une durée de 6 ans dans lesquels les flux sont versés en fin d’année :

* Contrat 1 : versement d’un flux constant de 10 000 € ;
* Contrat 2 : versement d’un premier flux de 15 000 € variant en progression arithmétique de raison -2000 €.

Pour un taux d’intérêt de 8 %, quel est le contrat qui permet de constituer le capital le plus important à l’échéance ?

**EXERCICE 28**

Il y a exactement deux ans, un individu a commencé à placer ses fonds dans un contrat d’assurance-vie. Son premier versement a été de 200 € et le deuxième de 300 €. Il compte augmenter son placement tous les ans de 100 €. Si la durée du placement est infinie, quelle est la valeur actuelle de cette rente pour un taux d’intérêt de 6 % ?

**EXERCICE 29**

Un individu désire placer mensuellement une somme en progression géométrique de 1 %. Le 1er versement est de 1000 €. Il compte faire cet effort d’épargne pendant 5 années. Le taux d’intérêt de son placement est estimé à 14.71 %. Quelle est la valeur actuelle et la valeur acquise de ce placement ?

**EXERCICE 30**

Un investisseur place chaque trimestre depuis un an une somme en progression géométrique de 3 %. Le premier versement effectué était de 500 €. Il poursuivra cet investissement pendant encore trois ans. Le taux d’intérêt de son placement est estimé à 12.55 %. Quelle est la valeur actuelle et la valeur acquise de cet investissement ?

**EXERCICE 31**

Un investisseur décide de placer ses fonds dans les deux OAT suivantes :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | OAT 4 % 2014 | OAT 4.25 % 2017 |
| Nominal | 1 € | 1 € |
| Taux facial | 4 % | 4.25 % |
| Détachement du coupon | 25/10/N | 25/10/N |
| Echéance | 25/10/2014 | 25/10/2017 |

A la date du mardi 22/10/2009, le cours de chaque obligation est :

* OAT 4 % 2014 : 106.99 % ;
* OAT 4.25 % 2017 : 107.71 %.

**Travail à faire :**

1. Si un investisseur décide d’acheter ces obligations le 22/10/2009, quand réglera-t-il sa transaction ?
2. L’investisseur achète effectivement le 22/10/2009, 1000 OAT 4 % 2014 et 500 OAT 4.25 % 2017, quel est le montant de la transaction ?

**EXERCICE 32**

Reprenons les deux OAT précédentes, mais cette fois l’achat est effectué le mardi 01/09/2009. A cette date, le cours de chaque OAT est :

* OAT 4 % : 106.82 %
* OAT 4.25 % ; 107.33 %

**Travail à faire :**

1. Quel est le prix payé pour l’achat de 1000 OAT 4 % et 500 OAT 4.25 % ?
2. Si l’investisseur revend ses OAT 4 % le lundi 12/04/2010, quel est le montant des intérêts réellement perçus ?

**EXERCICE 33**

Une obligation "X" de valeur nominale 500,00 € remboursable au pair, porte un intérêt facial de 8 %. Détenue depuis plusieurs années, elle sera remboursable dans cinq ans. Le taux de rendement des obligations sur le marché est actuellement de 4,5%.

**Travail à faire :**

1. Déterminer, immédiatement après le versement du coupon le cours de cette obligation
2. Déterminer, six mois après le versement du coupon :
   1. Le prix à payer pour cette obligation
   2. Le cours au pied du coupon (en % du nominal) et le coupon couru.

**EXERCICE 34**

Sur le marché obligataire européen, un emprunt à 5 % a un coupon annuel payé le 15 février. Il cote 98,12 le jeudi 10 avril d’une année non bissextile. Quel est son coupon couru et sa valeur de revente, pour un montant de 1000 € à la date de règlement (J+3) ?

**EXERCICE 35**

Quelle est la duration d’une obligation émise à 98 %, de durée 8 ans, de taux nominal 6 % et avec une prime de remboursement de 3 % ?

Quelle est sa sensibilité à une variation à la hausse du taux de rendement actuariel de 0.1 % ?

**EXERCICE 36**

Soit une obligation dont les caractéristiques sont les suivantes :

* Valeur Nominale : 1 €
* Coupon : 5.5 %
* Durée : 7 ans
* Date d’émission : le mercredi 16 septembre 2009 ;
* Amortissement in fine
* Prix d’émission : 95 %
* Prix de remboursement : 110 %

**Travail à faire :**

1. Quel est le taux de rendement actuariel de ce titre à l’émission ? Le résultat est-il logique ?
2. On achète ce titre à 110 % le lundi 13/09/2010. Quel est son taux de rendement actuariel à la date de valeur de la transaction ? Cette évolution du taux actuariel était-elle prévisible ?
3. Le mardi 01/10/11, l’investisseur décide de revendre son obligation. Son cours est de 122 % à cette date. Quel est le taux de rendement actuariel de son placement (raisonnement en dates de valeur) ?
4. Quel est le taux de rendement actuariel de l’obligation à la date de valeur de la transaction du 1er octobre 2011 ? Qui est intéressé par cette information ?

**EXERCICE 37**

Soit une obligation dont les caractéristiques sont :

* Date d’émission : 21/10/2009 ;
* Durée : 6 ans ;
* Date d’achat : lundi 18/10/10 ;
* Prix d’achat : 100 % ;
* Remboursement in fine au pair ;
* Taux nominal : 10 %

**Travail à faire :**

Calculer la duration de cette obligation à la date qui intéresse l’investisseur. A partir de la duration, calculer la sensibilité du cours à une variation du taux actuariel de 1 % à la hausse, 0.1 % à la baisse et 0.01 % à la baisse. En déduire le cours de l’obligation dans chaque cas.

**EXERCICE 38**

Une entreprise émet le 10/09/2007 un emprunt obligataire :

* valeur nominale : 2 000 €
* nombre d'obligations : 10 000
* taux facial : 7,5%
* prix d'émission : 1 985 €
* remboursement in fine, au pair, le 10/09/2013
* taux actuariel : 7,66%.

**Travail à faire**:

1. Vérifier le taux actuariel à la date d'émission.
2. Quel serait le taux actuariel si le prix d'émission était de 2 000 €.
3. Le 16/12/2007, dans un journal financier, l'emprunt obligataire est coté : 112,08.

* Calculer le coupon couru
* Le prix total d'une obligation

1. Calculer la valeur des obligations au 10/09/2008, si le taux du marché est de 6,82%.

**EXERCICE 39**

Soient deux obligations dont les caractéristiques à l’émission sont :

***Première obligation***

* PE : 98 %
* PR : 100 %
* Taux facial : 6,5 %
* Durée : 8 ans
* Remboursement par annuités constantes

***Deuxième obligation***

* PR : 100 %
* Taux facial : 0 %
* Durée : 8 ans

Quel doit être le prix d’émission de l’obligation coupon-zéro pour qu’elle procure, à la souscription, le même taux de rendement actuariel que la première obligation ?

**EXERCICE 40**

Pendant la période des soldes, un article a subi une démarque de 20 % suivie d’une deuxième démarque de 40 %. Quel est le taux de rabais après la deuxième démarque par rapport au prix initial ?

**EXERCICE 41**

Construire le tableau d’amortissement d’un emprunt de 4000 €, contracté à un taux actuariel de 6.5% sur une période de 7 ans avec 2 ans de différé de paiement selon que l’emprunt est par annuités constantes ou par amortissement constant. Quelle est l’incidence de ces deux modes de financement ?

**EXERCICE 42**

Pour l’achat d’un appartement dans la banlieue de Nancy, une banque lorraine accorde un prêt immobilier d’un montant de 120 000 € à son client. Le taux annuel est de 6%. Quel est le montant des mensualités si le prêt est remboursé sur 15 ans ?

Supposons que le montant de la mensualité soit jugé trop élevé par le client comme par sa banque. La capacité de remboursement mensuelle du client est estimée à 800 €. Quel devrait être le montant du prêt si son taux et sa durée restent identiques ?

Toujours dans le cas où la mensualité est jugée trop élevée (le client ne pouvant rembourser que 800€), calculez la durée du prêt si son taux et son montant restent identiques.

**EXERCICE 43**

Une somme de X euros, placée au taux annuel i d’intérêts capitalisés, a produit les intérêts suivants :

* 908,22 € à la fin de la 3ème année,
* 977,61 € à la fin de la 5ème année,
* 1091,77 € à la fin de la dernière année du placement.

**Travail à faire :**

Calculez le taux annuel i, la somme X placée ainsi que la durée n en années du placement.

**EXERCICE 44**

Soit un emprunt obligataire d’un montant nominal de 3 000 000 € et d’une valeur nominale de 1 € par obligation. Cet emprunt a une durée de vie de 5 ans et les flux qu’il génère sont :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Années | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Flux en euros | 150 000 | 150 000 | 150 000 | 150 000 | 3 160 000 |

Chaque obligation est émise sur le marché primaire à 0,975 €. Un investisseur achète 1000 obligations lors de l’émission. On suppose qu’il y a des coûts de transaction qui se composent de 1 % de courtage sur le prix d’achat. Quel est alors le taux de rendement à l’émission pour l’investisseur ?

*Calcul du coût de revient pour l’émetteur :*

Si on reprend les informations ci-dessus et que l’on rajoute les informations suivantes :

* Frais à la charge de l’émetteur : à l’émission, 2 % du prix d’émission
* Frais à la charge de l’émetteur : lors de chaque versement, 1% du versement effectué.

Quel est le coût de revient ce cet emprunt pour l’émetteur ?

**EXERCICE 45**

Une entreprise dépense 2 500 000 € pour investir à l’époque 0. Cet investissement produira les recettes nettes d’exploitation suivantes :

* 100 000 à l’époque 1
* 200 000 à l’époque 2
* 300 000 à l’époque 3
* 400 000 de l’époque 4 à l’époque 12

A la fin de la 12ème année, les équipements, complètement amortis, auront une valeur résiduelle de 100 000 €. Le coût du capital est de 12 %.

Calculez la valeur actuelle nette de cet investissement.

**EXERCICE 46**

Une entreprise emprunte un capital remboursable par 10 annuités constantes de 3000 €. Taux annuel progressif :

* 6,5 % pendant les cinq premières années
* 7,5 % pendant les cinq années suivantes

a) Calculer, au jour de la remise des fonds (la première annuité échéant dans un an) la valeur actuelle des cinq premières annuités puis la valeur actuelle des cinq annuités suivantes.

b) En déduire le montant du capital emprunté.

**EXERCICE 47**

Une entreprise emprunte un capital remboursable par 15 annuités constantes de 4000 €.

Taux annuel progressif :

* 5 % pendant les cinq premières années
* 10 % pendant les cinq années suivantes
* 15 % pendant les cinq dernières années.

**Travail à faire :**

1. Calculer, au jour de la remise des fonds (la première annuité échéant dans un an) la valeur actuelle des cinq premières annuités puis la valeur actuelle des cinq annuités suivantes et la valeur actuelle des cinq dernières annuités.
2. En déduire le montant du capital
3. Calculez la valeur actuelle de la 26ème à la 30ème annuité si l’entreprise décide d’emprunter sur 30 ans en remboursant 4000 € par an. On gardera un taux de 15 % pour les annuités de la 16ème à la 30ème année.
4. Quelle sera la valeur actuelle de ce nouvel emprunt.

**EXERCICE 48**

Calculer dans chacun des cas suivants, la valeur acquise par les versements périodiques constants, immédiatement après le dernier versement :

* 30 versements annuels chacun de 10 000 € au taux annuel de 10 % ;
* 20 semestrialités chacune de 2000 € au taux annuel de 12 %.